Exercice 1:

1. $\exists\, k \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = k$.
2. $\exists\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x_1) \neq f(x_2)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists\, m \in \mathbb{N},\ \ m > n$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \geqslant 3 \Rightarrow x \geqslant 2$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 1$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant 3 \Leftrightarrow n > 2$.

Exercice 2:

1. $\exists x \in A,\ \forall y \in B,\ (P(x) \text{ et non } Q(x,y))$.
2. $\Big(\forall x \in E,\quad \text{non } A(x)\Big)$ ou $\Big(\exists (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2,\ A(x_1) \text{ et } A(x_2)\Big)$.
3. $(\exists x \in E,\ A(x))$ et $(\exists x \in E,\ \ \text{non } A(x))$.

Exercice 3:

1. C'est faux. Si on prend $x = 1$ et $y = 2$, on n'a pas $x + y^2 = 1$.
2. C'est faux. Prenons $x = 2$. Soit $y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geqslant 0 > -1 = 1 - x$ donc $x + y^2 \neq 1$.
3. C'est faux. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Premier cas, si $x \neq 1$, posons $y = 0$, $x + y^2 = x \neq 1$.
   Deuxième cas, si $x = 1$ posons $y = 1$, $x + y^2 = 2 \neq 1$.
4. C'est vrai. Prenons $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 4: On raisonne par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers (on le note $\mathcal{P}$) soit fini. Alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}^n,\ \ \mathcal{P} = \{p_1; ...; p_n\}$.

Notons $N = \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$. Soit N est premier, soit il ne l'est pas.

- Supposons N premier. Alors, $\exists i \in [\![1; n]\!],\ N = p_i$. Or, $N > p_i$ donc c'est absurde.
- Supposons N non premier. Alors, $\exists i \in [\![1; n]\!],\ p_i | N$.
  Or, $p_i | \prod_{k=1}^{n} p_k$ donc, par différence, $p_i | \left(N - \prod_{k=1}^{n} p_k\right)$, i.e. $p_i | 1$. C'est absurde.

Donc, l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 5: Soient $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On raisonne par contraposée. Supposons que $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$. Donc $x - 1 = y - 1$. Donc $x = y$. On a démontré que $\forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ x \neq y \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

Exercice 6:

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par contraposée. Supposons que $x \neq 0$. On a donc $x > 0$.
   Posons $\varepsilon = \dfrac{x}{2} > 0$, on a $\varepsilon < x$.
   D'où le résultat.

2. On raisonne par double implication.

   $\Leftarrow$: $a = b = 0 \Rightarrow a + b = 0 = 0$.

   $\Rightarrow$: On raisonne par contraposée.
   Supposons $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Or a et b sont des entiers positifs donc $a > 0$ ou $b > 0$.
   On a donc $a + b \neq 0$.

3. On raisonne par récurrence.

$$P(n) : 6 | 5n^3 + n$$

   - Initialisation : Pour $n = 1$, $5n^3 + n = 6$ donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$5(n+1)^3 + n + 1 = 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1 = 5n^3 + n + 15n^2 + 15n + 6 = 5n^3 + n + 15n(n+1) + 6$$

     Or, 2 divise $n(n+1)$ donc 6 divise $15n(n+1)$.
     Par somme, 6 divise $5(n+1)^3 + n + 1$ et $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

4. On raisonne par double implication.

   $\Leftarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = b$. Ils sont bien multiples l'un de l'autre.

   $\Rightarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, multiples l'un de l'autre.
   Si l'un des deux est nul alors l'autre aussi donc on suppose $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 & , & a = k_1 b \text{ et } b = k_2 a \\ & \Rightarrow & a = k_1 k_2 a \\ & \Rightarrow & 1 = k_1 k_2 \\ & \Rightarrow & k_1 = k_2 = 1 \end{array}$$

   Les entiers sont bien égaux.

Exercice 7: Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété suivante "$10^n - 1$ est divisible par 9".
Démontrons à l'aide d'une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 0$, $10^0 - 1 = 0 = 9 \times 0$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a :

$$10^{n+1} - 1 = 10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1 = 9 \times 10^n + 10^n - 1\,.$$

  Or $9 | 9 \times 10^n$ et $9 | 10^n - 1$ par hypothèse de récurrence d'où $9 | 10^{n+1} - 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Par le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 9 | 10^n - 1\,.$$

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété suivante "$u_n = 2^{n+1} + 3^n$".
Démontrons à l'aide d'une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 0$, $2^{n+1} + 3^n = 2 + 1 = 3$. Or $u_0 = 3$ donc $P(0)$ est vraie.
  Pour $n = 1$, $2^{n+1} + 3^n = 4 + 3 = 7$. Or $u_1 = 7$ donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraie.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ & = & 5(2^{n+2} + 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} + 3^n) \\ & = & 2^{n+2}(5-3) + 3^{n+1}(5-2) \\ & = & 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{array}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence double,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 3^n\,.$$

Exercice 9: Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P(n)$ la propriété suivante "$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$".
Démontrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 1$, $n = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $P(k)$ soit vraie.
  - Si $n+1$ est impair, alors $\exists q \in \mathbb{N}, n+1 = 2^0(2q+1)$, donc $P(n+1)$ est vraie.
  - Si $n+1$ est pair, alors il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que $n+1 = 2k$, on utilise l'hypothèse de récurrence au rang k, donc $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, k = 2^p(2q+1)$ d'où $n = 2^{p+1}(2q+1)$, donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 10: On raisonne par analyse et synthèse.

- Analyse: On suppose que

$$\exists\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\ \ \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qui convient.

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\ \ \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\ \ 1 = (a+b)x + 2a - b \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2a - b \\ 1 = 4a + b \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

- Synthèse:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\ \ \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} = \frac{1/3(x+2) - 1/3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

On a bien trouvé un couple de réels qui convient.

Exercice 11: On raisonne par analyse-synthèse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Analyse: Supposons qu'il existe une fonction constante k et une fonction h telle que $h(0) = 0$ et telles que $f = k + h$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k + h(x)$. En évaluant en 0, on obtient : $f(0) = k + h(0) = k$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - f(0)$ et $k = f(0)$.

- Synthèse: Posons $k = f(0)$ et $h = f - f(0)$.
  Ces deux fonctions répondent au problème posé.

Exercice 12:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété suivante : " Si Arnaud laisse un morceau de la tablette de taille $n \times n$ à Arthur, alors il est en mesure de gagner la partie ". Démontrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation: Pour $n = 1$, Arnaud laisse un seul carré de chocolat à Arthur donc il gagne. $P(1)$ est vraie.

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Supposons que Arnaud laisse un morceau de la tablette de taille $(n+1) \times (n+1)$ à Arthur. Arthur découpe la tablette et rend à Arnaud une tablette rectangulaire de taille $k \times (n+1)$ où $k \in [\![1, n]\!]$. Arnaud peut donc découper à son tour la tablette et laisser un morceau de taille $k \times k$ à Arthur. Or $P(k)$ est vraie par hypothèse de récurrence, donc Arnaud est en mesure de gagner la partie.
  D'où $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Si Arnaud laisse un morceau carré de la tablette à Arthur, alors il sera en mesure de gagner la partie à coup sur.